

## INTEGRALE

Einige Aufgaben mit typischen Integralen der Physik, insbesondere das Wegintegral. Dies ist ein reines Bonus-Blatt, was die Wertung für die Studienleistung betrifft. Der behandelte Stoff ist aber durchaus relevant für die Klausur!

**[H39\*] Arbeit****[2\* + 2\* + 1\* = 5\* Extrapunkte]**

Ermitteln Sie die Arbeit

$$W[\Gamma] = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} d\lambda \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\lambda)),$$

die bei Verschieben eines Teilchens im Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  längs des Weges  $\Gamma : \lambda \mapsto \vec{r}(\lambda)$  von  $\vec{r}(\underline{\lambda})$  zu  $\vec{r}(\bar{\lambda})$  geleistet wird.

- Es sei  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{A} \times \vec{r}$ ,  $\vec{A} = (0, 0, A)$ , und  $\Gamma$  ein Halbkreis im Gegenzeigersinn um den Ursprung in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{A}$ .
- Es sei  $\vec{F}(\vec{r}) = -\kappa \cdot (x^3 + 2xy^2, y^3 + 2yx^2, 0)$  und  $\Gamma$  der stückweise gerade Weg, der von  $(-a, -b, 0)$  über  $(+a, -b, 0)$  zu  $(a, b, 0)$  führt.
- Warum ist es sinnvoll, zunächst zu prüfen, ob zur Kraft ein Potential gehört?

**[H40\*] Mehr Arbeit****[3\* Extrapunkte]**

Welche Arbeit leisten die gravitativen Kräfte am Fadenpendel auf dem Bahnabschnitt zwischen minimalem und maximalem Winkel zur Vertikalen?

**[H41\*] Weglänge****[4\* Extrapunkte]**

Wie lang ist die Parabel  $\Gamma : s \mapsto (s, as^2)$  zwischen  $(0, 0)$  und  $(1, a)$ ? *Hinweis:* Sie müssen ein Integral berechnen, bei dem Sie vermutlich die Stammfunktion nicht selbst bestimmen können. Schlagen Sie die Stammfunktion dann nach und überprüfen Sie explizit durch Ableiten, dass dies die korrekte Stammfunktion ist.

**[H42\*\*] Volumenintegration****[4\*\* Superextrapunkte]**

Bestimmen Sie durch Integration über  $x$  und  $y$  das Volumen zwischen den Flächen

$$z(x, y) = h - ax^2 - by^2 \quad \text{und} \quad z(x, y) = 0.$$

*Hinweis:* Versuchen Sie alle Integrationen ohne Formelsammlungen zu berechnen. Die Substitution  $x = \sin \varphi$  kann sich im Verlauf der Rechnung als sehr nützlich erweisen, da dann z.B.  $1 - x^2 = \cos^2 \varphi$  ist.

## HINWEIS

**Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!**